۱) هر گاه C, B, A زوایای مثلثی باشند نشان دهید .

$$\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}+\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲}+\tan\frac{C}{۲}\tan\frac{A}{۲}=۱$$

حل :

$$A+B+C=\pi \Rightarrow A+B=\pi-C \Rightarrow \frac{A}{۲}+\frac{B}{۲}=\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲} \Rightarrow \tan(\frac{A}{۲}+\frac{B}{۲})=\tan(\frac{\pi}{۲}-\frac{C}{۲})$$

$$\Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{۲}+\tan\frac{B}{۲}}{۱-\tan\frac{A}{۲}.\tan\frac{B}{۲}}=\cot\frac{C}{۲} \Rightarrow \frac{\tan\frac{A}{۲}+\tan\frac{B}{۲}}{۱-\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}}=\frac{۱}{\tan\frac{C}{۲}} \Rightarrow$$

$$\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{C}{۲}+\tan\frac{B}{۲}\tan\frac{C}{۲}=۱-\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲} \Rightarrow$$

$$\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{B}{۲}+\tan\frac{A}{۲}\tan\frac{C}{۲}+\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{۲}=۱$$

۲) درستی تساوی زیر را ثابت کنید .

$$\cos ۲۰+\cos ۴۰+\sqrt{۳}\sin ۴۰=۳\cos ۲۰$$

حل :

$$\cos ۲۰+\cos ۴۰+\sqrt{۳}\sin ۴۰=۲\cos\frac{۲۰+۴۰}{۲}\cos\frac{۲۰-۴۰}{۲}+\sqrt{۳}\sin ۴۰=$$

$$۲\cos ۳۰\cos ۱۰+\sqrt{۳}\sin ۴۰=\sqrt{۳}\cos ۱۰+\sqrt{۳}\sin ۴۰ \xrightarrow{\cos ۱۰=\sin ۸۰}$$

$$=\sqrt{۳}(\sin ۸۰+\sin ۴۰)=\sqrt{۳}(۲\sin ۶۰\cos ۲۰)=\sqrt{۳}(۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos ۲۰)=۳\cos ۲۰$$

۳) حاصل عبارت $A=\cos^{۲}(x+y)+\cos^{۲}(x-y)-\cos^{۲}y\cos ۲x$ چیست ؟

حل :

$$A=\frac{1+\cos(2x+2y)}{2}+\frac{1+\cos(2x-2y)}{2}-\cos 2y\cos 2x$$

$$=1+\frac{1}{2}[\cos(2x+2y)+\cos(2x-2y)]-\cos 2y\cos 2x$$

$$=1+\frac{1}{2}\times 2\cos 2x\cos 2y-\cos 2y\cos 2x=1+\cos 2x\cos 2y-\cos 2y\cos 2x=1$$

۴) جواب عبارت $(\tan 50+\tan 40)\sin 20$ را بدست آورید .

حل :

$$(\frac{\sin 50}{\cos 50}+\frac{\sin 40}{\cos 40})\sin 20=(\frac{\sin 50\cos 40+\cos 50\sin 40}{\cos 50\cos 40})\sin 20$$

$$\frac{\sin 90}{\cos 50\cos 40}.\sin 20=\frac{\sin 20}{\cos 50\cos 40}=\frac{\sin 20}{\sin 40\cos 40}=\frac{\sin 20}{\frac{1}{2}\sin 80}=\frac{2\sin 10\cos 10}{\frac{1}{2}\cos 10}=4\sin 10$$

۵) اگر $\sin x+\cos x=\sqrt{2}$ باشد $\cos 2x$ را محاسبه کنید .

حل :

$$(\sin x+\cos x)^2=2\Rightarrow \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2\Rightarrow \sin 2x=1$$

$$\cos 2x=\pm\sqrt{1-\sin^2 2x}=0$$

۶) ثابت کنید .

$$\tan^{-1}(\frac{x-y}{1+xy})=\tan^{-1}(x)-\tan^{-1}(y)$$

حل :

$$\left.\begin{array}{l}\tan^{-1} x=\alpha\Rightarrow \tan\alpha=x\\ \tan^{-1} y=\beta\Rightarrow \tan\beta=y\end{array}\right\}\Rightarrow \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha.\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{x-y}{1+xy}\Rightarrow \tan^{-1}(\frac{x-y}{1+xy})=\alpha-\beta\Rightarrow \tan^{-1}(\frac{x-y}{1+xy})=\tan^{-1}x-\tan^{-1}y$$

۷) معادله زیر را حل و جواب های دربازه $[0,2\pi]$ را مشخص کنید .

$$(\cos^2 x-\sin^2 x)\sin 2x=\frac{1}{4}$$

حل :

$$\cos 2x \sin 2x = \frac{1}{4} \to \frac{1}{2}\sin 4x = \frac{1}{4} \to \sin 4x = \frac{1}{2} = \sin(\frac{\pi}{6})$$

$$\to \begin{cases} 4x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \to x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \\ 4x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{6} \to x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{24} \end{cases}$$

$$\to x = \frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{27\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}$$

۸) درستی رابطه ی $\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = 2\cos\alpha - 1$ را بررسی کنید $(\alpha \neq \frac{k\pi}{2})$

حل :

$$\frac{2\sin\alpha\cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha}{\cos\alpha} =$$

$$4\cos^2\alpha - 3 = 4(\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}) - 3 = 2\cos 2\alpha - 1$$

۹) معادله ی $\sin 2x + \sqrt{3}\cos x = 0$ را حل کنید و جواب های آن را در بازه ی $[0, 2\pi]$ را تعیین کنید .

حل :

$$2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x = 0 \to \cos x(2\sin x + \sqrt{3}) = 0 \to$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \to x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \to \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi + \frac{4\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3}$$

۱۰) معادله $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$ در فاصله $[0, 4\pi]$ چند ریشه دارد .

حل :

$$\sqrt{2}\,CoS\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \to CoS\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \to 4$$

$$\to ۲x-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi \to x=k\pi+\frac{\pi}{۸} \to = \circ x=\frac{\pi}{۸} \quad ۹k=۱\to x=\pi+\frac{۲}{۸}$$

$$k=۲x=۲\pi+\frac{\pi}{۸}\ ,۳\to x=۳\pi+\frac{\pi}{۸}$$

۱۱) بیش ترین مقدار عبارت $۳\sin^۲ x-۲\cos^۲ x+\cos x$ را بدست آورید .

حل :

$$۳\left(۱-\cos^۲ x\right)-۲\cos^۲ x+\cos x=-۵\cos^۲ x+\cos x+۳=$$

$$-۵\left[\cos^۲ x-\frac{۱}{۵}\cos x\right]+۳=-۵\left[(\cos x-\frac{۱}{۱۰})^۲-\frac{۱}{۱۰۰}\right]+۳=-۵(\cos x-\frac{۱}{۱۰})^۲+\frac{۶۱}{۲۰}$$

با توجه به اینکه $-۵(\cos x-\frac{۱}{۱۰})^۲\leq ۰$ پس $y\leq\frac{۶۱}{۲۰}$ می باشد .

۱۲) ثابت کنید .

$$\frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\tan 5x.$$

حل :

$$\frac{\sin 8x+\sin 5x+\sin 2x}{\cos 8x+\cos 5x+\cos 2x}=\frac{(\sin 8x+\sin 2x)+\sin 5x}{(\cos 8x+\cos 2x)+\cos 5x}=\frac{2\sin 5x\cos 3x+\sin 5x}{2\cos 5x\cos 3x+\cos 5x}$$
$$=\frac{\sin 5x(2\cos 3x+1)}{\cos 5x(2\cos 3x+1)}=\tan 5x$$

۱۳) حاصل هر یک از عبارات زیر را بدست آورید .

الف) $\sin^{-1}(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right))$ **ب) $\cot(\tan^{-1}(-1))$**

حل :

$$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}\to\sin^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$$
$$\tan^{-1}(-1)=\frac{-\pi}{4}\to\cot(\tan^{-1}(-1))=\cot\left(\frac{-\pi}{4}\right)=-\cot\left(\frac{\pi}{4}\right)=-1$$

۱۴) معادله مثلثاتی $۲\sin^۲ x+\sin x-۳=\circ$ را حل کرده و جوابهای بین $\circ$, ۲π را تعیین کنید .

حل :

$$۲\sin^۲ x+\sin x-۳=\circ \xrightarrow{۲+۱-۳=\circ} \begin{cases}\sin x=۱\to x=\frac{\pi}{۲}\\ \sin x=-\frac{۳}{۲}\quad \text{غ ق ق}\end{cases}$$

۱۵) معادله مثلثاتی مقابل را حل کنید .

$$\frac{\sin ۷x - \sin x}{\sin ۳x} = ۲$$

حل :

$$\frac{\sin ۷x - \sin x}{\sin ۳x} = \frac{\sin ۷x + \sin(-x)}{\sin ۳x} = \frac{۲\sin ۳x \cos ۴x}{\sin ۳x} = ۲\cos ۴x = ۲ \to \cos ۴x = ۱ \to$$

$$\alpha = ۰ \to \text{ج ک}\begin{cases} ۴x = ۲k\pi \to x = \dfrac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

۱۶) دامنه ی تابع $y = \cos^{-۱}(۱ - x^۲)$ را بیابید .

حل :

$$-۱ \le ۱ - x^۲ \le ۱ \to -۲ \le -x^۲ \le ۰ \to ۰ \le x^۲ \le ۲ \to\to |x| \le \sqrt{۲} \to -\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} \to D = \left[-\sqrt{۲}, \sqrt{۲}\right]$$

۱۷) حاصل عبارت زیر را بیابید .

$$\tan(۲\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) + \sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}))$$

حل :

$$\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲}) = \alpha \to \cos\alpha = -\frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \alpha = \frac{۳\pi}{۴}$$

$$\sin^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = \beta \to \sin\beta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \to \beta = \frac{\pi}{۴}$$

$$\tan(۲(\frac{۳\pi}{۴}) + \frac{\pi}{۴}) = \tan(\frac{۷\pi}{۴}) = \tan(\frac{-\pi}{۴}) = -۱$$

۱۸) کلیه جوابهای معادله زیر را در فاصله $[۰,۲\pi]$ بیابید .

$$\sin x - \sqrt{۳}\cos x = ۱$$

حل : طرفین تساوی را بر ۲ تقسیم می کنیم .

$$\frac{۱}{۲}\sin x-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}\rightarrow \cos\frac{\pi}{۳}\sin x-\sin\frac{\pi}{۳}\cos x=\frac{۱}{۲}\rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{۳})=\frac{۱}{۲}\rightarrow \sin(x-\frac{\pi}{۳})=\sin\frac{\pi}{۶}$$

$$x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲} \quad , \quad x-\frac{\pi}{۳}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}\rightarrow x=۲k\pi+\frac{۷\pi}{۶}$$

$$k=۰\rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\ ,\ \frac{۷\pi}{۶}$$

۱۹) مقدار عددی $\cos^{۴}\frac{\pi}{۱۲}-\sin^{۴}\frac{\pi}{۱۲}$ را محاسبه کنید .

حل :

$$\cos^4\frac{\pi}{12}-\sin^4\frac{\pi}{12}=(\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12})(\cos^2\frac{\pi}{12}-\sin^2\frac{\pi}{12})=\cos^2\frac{\pi}{12}+\sin^2\frac{\pi}{12}$$

$$=\cos 2(\frac{\pi}{12})=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

۲۰) معادله ی زیر را حل کنید .

$$\tan x+\tan ۲x-\tan ۳x=۰$$

حل :

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}-\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=۰\rightarrow \frac{\sin x\cos ۲x+\sin ۲x\cos x}{\cos x\cos ۲x}-\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}=۰\rightarrow$$

$$\frac{\sin ۳x}{\cos x\cos ۲x}=\frac{\sin ۳x}{\cos ۳x}\rightarrow \sin ۳x=۰\rightarrow x=\frac{k\pi}{۳}\ ,\cos x\cos ۲x=\cos ۳x\rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}\cos x+\frac{۱}{۲}\cos ۳x=\cos ۳x\rightarrow \frac{۱}{۲}\cos x=\frac{۱}{۲}\cos ۳x\rightarrow \cos x=\cos ۳x\rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+x\rightarrow x=k\pi \\ ۳x=۲k\pi-x\rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} \end{cases}$$

۲۱) کسر $\frac{۲\sin ۷۰-۱}{۲\cos ۷۰+۲\sin ۲۰+\sqrt{۳}}$ را ساده کنید .

حل :

$$\frac{۲\sin ۷۰-۱}{۲\cos ۷۰+۲\sin ۲۰+\sqrt{۳}}=\frac{\sin ۷۰-\frac{۱}{۲}}{\cos ۷۰+\sin ۲۰+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}=\frac{\sin ۷۰-\sin ۳۰}{\sin ۲۰+\sin ۲۰+\sin ۶۰}=$$

$$\frac{۲\sin ۲۰\cos ۵۰}{۲\sin ۲۰\cos ۴۰+\sin ۲۰}=\frac{۲\cos ۵۰}{۲\cos ۴۰+۱}=\frac{۲\sin ۴۰}{۲\cos^{۲} ۲۰}=\frac{۲\sin ۲۰\cos ۲۰}{\cos^{۲} ۲۰}=\frac{۲\sin ۲۰}{\cos ۲۰}=۲\tan ۲۰$$

۲۲) معادله ی مثلثاتی زیر را حل کنید.

$$\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})$$

حل : با توجه به رابطه : $\sin ۳\alpha+\cos ۳\beta=۱$.

$$\sin ۳\alpha+\cos ۳\alpha=۱\rightarrow\sqrt{۲}\cos(۳\alpha-\frac{\pi}{۴})=۱\rightarrow\cos(۳\alpha-\frac{\pi}{۴})=\frac{۱}{\sqrt{۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\rightarrow\cos(۳\alpha-\frac{\pi}{۴})=\cos\frac{\pi}{۴}\rightarrow ۳\alpha-\frac{\pi}{۴}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\rightarrow\alpha=\frac{۲k\pi}{۳},\alpha=\frac{۲k\pi}{۳}+\frac{\pi}{۶}$$

۲۳) مقدار عبارت زیر را به دست آورید .

$$\sin(\cos^{-۱}(-\frac{\sqrt{۶}}{۳})=$$

حل :

$$\cos^{-۱}(-\frac{\sqrt{۶}}{۳})=\alpha\rightarrow\cos\alpha=-\frac{\sqrt{۶}}{۳},\alpha\in[۰,\pi]\rightarrow\sin\alpha=\sqrt{۱-\cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۶}{۹}}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

$$\rightarrow\sin(\cos^{-۱}(-\frac{\sqrt{۶}}{۳}))=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

۲۴) معادله مثلثاتی روبرو را حل کرده و جوابهای کلی آن را بنویسید

$$\cos ۲x-\cos x+۱=۰$$

حل :

$$۲\cos^{۲}x-۱-\cos x+۱=۰\rightarrow ۲\cos^{۲}x-\cos x=۰\rightarrow\cos x(۲\cos x-۱)=۰\rightarrow\begin{cases}\cos x=۰ & (۱)\\ \cos x=\frac{۱}{۲} & (۲)\end{cases}$$

$$(۱)\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\qquad\qquad(۲)\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳}$$

۲۵) مقادیر عبارتهای زیر را بدست آورید .

الف) $\sin^{-۱}(\frac{۱}{۲})+۲\cos^{-۱}(\frac{\sqrt{۲}}{۲})$

ب) $۴\tan^{-۱}(۱)+۶\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})-۸\sin^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})$

حل الف)

$$\frac{\pi}{۶}+۲(\frac{\pi}{۴})=\frac{۲\pi}{۳}$$

حل ب)

$$۴(\frac{\pi}{۴})+۶(\frac{۵\pi}{۶})-۸(-\frac{\pi}{۴})=۸\pi$$

۲۶) حدود k برای آن که معادله ی $۳\sin^{۲} x+۴\cos^{۲} x+k\sin x\times\cos x=۲$ دارای ریشه باشد کدام است؟

حل :

$$\xrightarrow{\div\cos^{۲} x} ۳\tan^{۲} x+۴+k\tan x=\frac{۲}{\cos^{۲} x}\xrightarrow{\frac{۱}{\cos^{۲} x}=۱+\tan^{۲} x}۳\tan^{۲} x+۴+k\tan x=۲+۲\tan^{۲} x$$

$$\tan^{۲} x+k\tan x+۲=۰\xrightarrow{\Delta\ge ۰}k^{۲}-۴(۱)(۲)\ge ۰\to k^{۲}-۸\ge ۰\to |k|\ge ۲\sqrt{۲}$$

$$\to\begin{cases}k\ge ۲\sqrt{۲}\\ k\le -۲\sqrt{۲}\end{cases}$$

۲۷) کمترین مقدار $\sin^{-۱}(x^{۲}+x-\frac{۱}{۴})$ را بدست آورید.

حل :

$$y=\sin^{-۱}(x^{۲}+x-\frac{۱}{۴})\to y=\sin^{-۱}[(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۴}]=\sin^{-۱}[(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}]$$

$\sin^{-۱}$ تابعی اکیداً صعودی است پس

$$(x+\frac{۱}{۲})^{۲}\ge ۰\to (x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}\ge -\frac{۱}{۲}\to \sin^{-۱}[(x+\frac{۱}{۲})^{۲}-\frac{۱}{۲}]\ge \sin^{-۱}(-\frac{۱}{۲})$$

$$\to y\ge \sin^{-۱}(-\frac{۱}{۲})\to y\ge -\frac{\pi}{۶}\to \min y=-\frac{\pi}{۶}$$

۲۸) اگر a, b, c و d جمله های متوالی یک دنباله عددی باشند، معادله $\sin ax\,.\cos bx=\sin cx\,.\cos dx$ را حل کنید.

حل :

$$\frac{1}{2}[\sin(ax+bx)+\sin(ax-bx)]=\frac{1}{2}[\sin(cx+dx)+\sin(cx-dx)]$$

با توجه به اینکه a, b, c و d جملات متوالی یک تصاعد عددی اند، پس: $c-d=a-b$

$$\sin(ax+bx)=\sin(cx+dx)$$

$$\begin{cases}(a+b)x=2k\pi+(c+d)x\\ (a+b)x=2k\pi+\pi-(c+d)x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a-c+b-d)x=2k\pi\\ (a+b+c+d)x=2k\pi+\pi\end{cases}\to\begin{cases}x=\frac{2k\pi}{a-c+b-d}\\ x=\frac{2k\pi+\pi}{a+b-c+d}\end{cases}$$

۲۹) اگر $\cos\theta=\frac{۳}{۵}$, θ در ربع اول باشد حاصل $\sin(۲\cos^{-۱}\frac{۶}{۱۰})$ را بدست آورید.

حل :

$$\cos\theta=\frac{3}{5}=\frac{6}{10}\to\cos^{-1}\frac{6}{10}=\theta,\sin^2\theta+\cos^2\theta=1\to\sin\theta=\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\theta)=2\sin\theta\cos\theta=2(\frac{4}{5})(\frac{3}{5})=\frac{24}{25}$$

۳۰) حاصل $\frac{\sin 40}{\sin 20}(1+\tan 20\times\tan 10)$ چقدر است؟

حل :

$$\frac{2\sin 20\cos 20}{\sin 20}(\frac{\cos 20\cos 10+\sin 20\sin 10}{\cos 20\cos 10})=\frac{2\cos(20-10)}{\cos 10}=\frac{2\cos 10}{\cos 10}=2$$

۳۱) اگر $\sin x+\cos x=\frac{1}{2}$ باشد . حاصل $\tan x+\cot x$ را حساب کنید .

حل :

$$(\sin x+\cos x)^2=(\frac{1}{2})^2\to 1+2\sin x\cos x=\frac{1}{4}\to\sin x\cos x=\frac{-3}{8}$$

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=-\frac{8}{3}$$

۳۲) معادله $\sin 3x=2\sin x$ در فاصله ی $[0,2\pi]$ چند ریشه دارد ؟

حل :

$$\sin 3x-2\sin x=0\to\sin 3x-\sin x-\sin x=0\to 2\sin x\cos 2x-\sin x=0\to\sin x(2\cos 2x-1)=0\to$$

$$\begin{cases}\sin x=0\to x=0\,,\pi\,,2\pi\\ \cos 2x=\frac{1}{2}\to\alpha=\frac{\pi}{3}\to 2x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\to x=k\pi\pm\frac{\pi}{6}\to x=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\end{cases}$$

۳۳) معادله $\frac{Sin3x+Sinx}{Sinx}=1$ **را حل کنید .**

حل :

$$\frac{2Sin\frac{3x+x}{2}Cos\frac{3x-x}{2}}{Sinx}=1\to\quad\frac{2(2SinxCosx)Cosx}{Sinx}=1\ \frac{2Sin2xCosx}{Sinx}=1\to$$

$Sinx\neq 0$ **چون** $x=k\pi\pm\frac{\pi}{3}\ Cos^2x=\frac{1}{4}=(Cos\frac{\pi}{3})^2\to\to 4Cos^2x=1\to$

۳۴) حاصل عبارت $\cot g[2\cos^{-1}(-\frac{1}{2})+\sin^{-1}(-1)+tg^{-1}\sqrt{3}]$ **را پیدا کنید .**

حل :

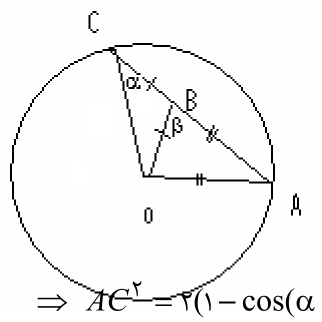
$Sin^{-۱}(-۱) = -Sin^{-۱}۱$ و

$Cos^{-۱}(-\frac{۱}{۲}) = (\pi - Cos^{-۱}\frac{۱}{۲})$

$\to Cotg[۲Cos^{-۱}(-\frac{۱}{۲}) + Sin^{-۱}(-۱) + tg^{-۱}\sqrt{۳}] = Cotg[۲(\pi - Cos^{-۱}\frac{۱}{۲}) - Sin^{-۱}۱ + tg^{-۱}\sqrt{۳}] =$

$Cotg[۲\pi - ۲\frac{\pi}{۳} - \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}] = -Cotg(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۳}) = tg\frac{\pi}{۳} = \sqrt{۳}$

۳۵) با توجه به شکل مقابل ثابت کنید $AC = ۲\sin\frac{\alpha + \beta}{۲}$.



حل :

$\Delta OAC: \quad AC^{۲} = OA^{۲} + OC^{۲} - ۲OA.OC.\cos(\alpha + \beta)$

$AC^{۲} = ۱ + ۱ - ۲\cos(\alpha + \beta)$

$\Rightarrow AC^{۲} = ۲(۱ - \cos(\alpha + \beta)) \quad \Rightarrow \quad AC^{۲} = ۲.۲.\sin^{۲}(\frac{\alpha + \beta}{۲}) \quad \Rightarrow \quad AC = ۲\sin\frac{\alpha + \beta}{۲}$

۳۶) معادله‌ی مثلثاتی زیر را حل کنید .

$\tan(x - \frac{\pi}{۳}).\tan(۲x + \frac{\pi}{۴}) = ۱$

حل :

$\tan(x - \frac{\pi}{۳}) = \cot(۲x + \frac{\pi}{۴})$

$\tan(x - \frac{\pi}{۳}) = \tan(\frac{\pi}{۲} - ۲x - \frac{\pi}{۴})$

$x - \frac{\pi}{۳} = K\pi + \frac{\pi}{۴} - ۲x \Rightarrow x = \frac{K\pi}{۳} + \frac{۷\pi}{۳۶}$

۳۷) اگر $\tan\frac{x}{۳} = \frac{۱}{۳}$ و $\tan(y - \frac{x}{۳}) = \frac{۱}{۴}$ باشد آنگاه $\tan(y + \frac{x}{۳})$ چقدر است؟

حل :

$$\tan(y - \frac{x}{۳}) = \frac{\tan y - \tan\frac{x}{۳}}{۱ + \tan y \, \tan\frac{x}{۳}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\tan y - \frac{۱}{۳}}{۱ + \frac{۱}{۳}\tan y} = \frac{۱}{۴} \quad \Rightarrow \quad \tan y = \frac{۷}{۱۱}$$

$$\tan(y + \frac{x}{۳}) = \frac{\tan y + \tan\frac{x}{۳}}{۱ - \tan y \tan\frac{x}{۳}} = \frac{\frac{۷}{۱۱} + \frac{۱}{۳}}{۱ - \frac{۷}{۱۱} \times \frac{۱}{۳}} = \frac{۳۲}{۲۶}$$

۳۸) در هر مثلث قائم الزاویه $ABC \ (A = ۹۰^{o})$ ثابت کنید .

حل :

$$\cos(B-C)=\frac{۲bc}{a^۲}$$

$$\cos(B-C)=\cos B.\cos C+\sin B.\sin C=\frac{c}{a}\times\frac{b}{a}+\frac{b}{a}\times\frac{c}{a}=\frac{۲bc}{a^۲}$$

۳۹) معادله مثلثاتی $۲\cos^۲ x+\sqrt{۳}\cos x=۰$ را حل کنید .

حل :

$$\cos x(۲\cos x+\sqrt{۳})=۰\rightarrow\begin{cases}\cos x=۰\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۲}\\ \cos x=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow x=۲k\pi\pm\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

۴۰) مقدارعددی $\tan ۵۰^\circ+\tan ۸۵^\circ-\tan ۵۰^\circ\tan ۸۵^\circ$ را بدست آورید .

حل : می دانیم $۸۵+۵۰=۱۳۵$ پس

$$\tan ۱۳۵^\circ=\tan(۱۸۰-۴۵)=-۱$$

$$\tan ۱۳۵^\circ=-۱=\tan(۸۵+۵۰)=\frac{\tan ۸۵+\tan ۵۰}{۱-\tan ۸۵\tan ۵۰}\quad\Rightarrow$$

$$\tan ۸۵\tan ۵۰-۱=\tan ۸۵+\tan ۵۰\rightarrow\tan ۸۵+\tan ۵۰-\tan ۸۵\tan ۵۰=-۱$$

۴۱) دوره تناوب تابع $f(x)=\tan ۲x-\cot ۲x$ را حساب کنید .

حل :

$$y=\frac{\sin ۲x}{\cos ۲x}-\frac{\cos ۲x}{\sin ۲x}=\frac{\sin^۲ ۲x-\cos^۲ ۲x}{\cos ۲x\sin ۲x}=\frac{\cos ۴x}{\frac{۱}{۲}\sin ۴x}=-۲\cot ۴x\qquad T=\frac{\pi}{۴}$$

۴۲) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید و مجموعه جواب آنرا در بازه $[۰,۲\pi]$ بیابید.

حل :

$$Sinx(۱-Sinx)=۰\rightarrow\begin{cases}Sinx=۰\rightarrow x=۰,\pi,۲\pi\\ ۱-Sinx=۰\rightarrow Sinx=۱\rightarrow x=\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

۴۳) اگر $\sin ۲x = \frac{۴}{۵}$ باشد، حاصل کسر $\frac{\tan^۲ x + \cot^۲ x}{\tan^۳ x + \cot^۳ x}$ را به دست آورید.

حل :

$$\sin ۲x = \frac{۴}{۵} \Rightarrow ۲\sin x \cos x = \frac{۴}{۵} \overset{\div\cos^۲ x}{\Rightarrow} ۲\tan x = \frac{۴}{۵}(\frac{۱}{\cos^۲ x}) \Rightarrow ۲\tan x = \frac{۴}{۵}(۱ + \tan^۲ x)$$

$$\Rightarrow ۲\tan^۲ x - ۵\tan x + ۲ = ۰ \Rightarrow \tan x = ۲ \vee \tan x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \cot x = \frac{۱}{۲} \vee \cot x = ۲$$

$$\frac{\tan^۲ x + \cot^۲ x}{\tan^۳ x + \cot^۳ x} \overset{\tan x = ۲}{\Rightarrow} \frac{۳۴}{۶۵}$$

۴۴) معادله مثلثاتی $\cos ۲x - ۳\cos x + ۱ = ۰$ را حل کنید.

حل :

$$\cos ۲x - ۳\cos x + ۱ = ۰ \Rightarrow ۲\cos^۲ x - \cancel{۱} - ۳\cos x + \cancel{۱} = ۰$$

$$۲\cos^۲ x - ۳\cos x = ۰ \Rightarrow \cos x(۲\cos x - ۳) = ۰ \begin{cases} \cos x = ۰ \to x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \\ \cos x = \frac{۳}{۲} \qquad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

۴۵) مطلوب است محاسبه $\tan(۲\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))$.

حل :

$$\tan ۲x = \frac{۲\tan x}{۱ - \tan^۲ x} \Rightarrow \tan(۲\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵})) = \frac{۲\tan(\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))}{۱ - \tan^۲(\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))}$$

$$\Rightarrow \tan(\cos^{-۱}(\frac{۴}{۵})) = \frac{۳}{۴} \Rightarrow \tan(\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵})) = -\frac{۳}{۴}$$

چون $(-\frac{۴}{۵})$ منفی است و زاویه ای که cos آن منفی شده است در ربع دوم است پس tan آن نیز منفی است.

$$\tan(۲\cos^{-۱}(-\frac{۴}{۵}))=\frac{۲(-\frac{۳}{۴})}{۱-(\frac{۳}{۴})^۲}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{۱-\frac{۹}{۱۶}}=-\frac{۲۴}{۷}$$

۴۶) مقدار $\sin\left(\tan^{-۱}(-۱)\right)$ را محاسبه کنید .

حل : چون $-\frac{\pi}{۴}$ زاویه ای در $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ است و $\tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$ پس $\tan^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۴}$ و داریم

$$\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin(\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۴۷) معادله $\cos^۲ x+۳\sin x-۳=۰$ را حل کنید .

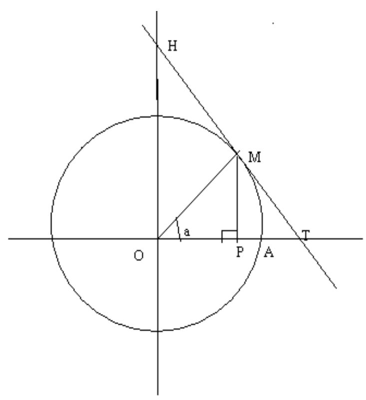
حل : قرار می دهیم $\cos^۲ x=۱-\sin^۲ x$ در نتیجه بدست می آید

$$\sin^۲ x-۳\sin x+۲=۰\longrightarrow(\sin x-۲)(\sin x-۱)=۰\longrightarrow\begin{cases}\sin x=۲\\ \sin x=۱\end{cases}$$

که فقط جواب $\sin x=۱$ قابل قبول بوده و دارای جواب $(k\in Z)$ $x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ می باشد .

۴۸) در دایره مثلثاتی مقابل اندازه MH را بر حسب α بیابید.

حل :

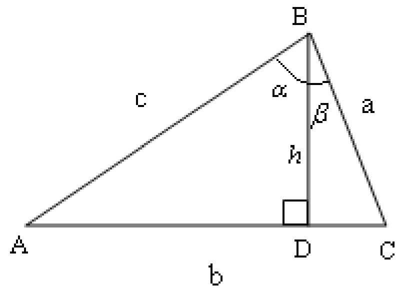


$$\Delta OMH\approx\Delta OMP\Rightarrow\frac{OM}{MP}=\frac{MH}{OP}\quad\Rightarrow\frac{۱}{\sin\alpha}=\frac{MH}{\cos\alpha}\Rightarrow MH=\cot\alpha$$

۴۹) با روش هندسی ثابت کنید: $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

حل : αو β را زوایای دلخواه حاده ای فرض می کنیم مثلث ABC را در نظر می گیریم که در آن $\angle B=\alpha+\beta$ باشد بطوری که ارتفاع $h=BD$ با اضلاع cو a به ترتیب زوایای α و β را بسازد.

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}ac\sin(\alpha+\beta)$$



و از طرف دیگر

$$S_{ABC}=S_{ABD}+S_{DBC} \quad و \quad S_{ABD}=\frac{۱}{۲}AD\times h \quad و \quad S_{DBC}=\frac{۱}{۲}CD\times h$$
$$CD=a\sin\beta \quad و \quad AD=c\sin\alpha \quad و \quad h=a\cos\beta=c\cos\alpha$$
$$S_{ABD}=\frac{۱}{۲}ac\sin\alpha\cos\beta \quad و \quad S_{DBC}=\frac{۱}{۲}ac\cos\alpha\sin\beta$$

که اگر در رابطه (۱) قرار دهیم و طرفین تساوی را به $\frac{۱}{۲}ac$ ساده کنیم رابطه حکم بدست می آید.

۵۰) حاصل عبارت $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{۱۲}-\cos\frac{\pi}{۱۲}}{۳\sin\frac{\pi}{۱۲}\cos\frac{\pi}{۱۲}}$ را بدست آورید.

حل :

$$A=\frac{\sqrt{۲}\sin(\frac{\pi}{۱۲}-\frac{\pi}{۴})}{\frac{۳}{۲}\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{۲\sqrt{۲}\sin(-\frac{\pi}{۶})}{۳\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{-۲\sqrt{۲}}{۳}$$

۵۱) اگر دوره ی تناوب تابع با ضابطه $f(x)=\sin ax\cos bx+\cos ax\sin bx$ برابر $\frac{\pi}{۲}$ باشد چه رابطه ای بین a و b برقرار است؟

حل :

$$f(x)=\sin(ax+bx)=\sin(a+b)x \Rightarrow T=\frac{۲\pi}{a+b}=\frac{\pi}{۲}\Rightarrow a+b=۴$$

۵۲) مقدار عبارت $A=۲\cot^{-۱}(-۱)+۳\cos^{-۱}(\frac{-\sqrt{۳}}{۲})-۵\sin^{-۱}(\frac{-\sqrt{۲}}{۲})$ را بدست آورید.

حل :

$$A=۲(\pi-\frac{\pi}{۴})+۳(\pi-\frac{\pi}{۶})-۵(-\frac{\pi}{۴}) \quad \Rightarrow A=\frac{۲۱\pi}{۴}$$

۵۳) درستی رابطه‌ی روبرو را بررسی کنید.

$$\frac{\sin ۳\alpha-\sin ۵\alpha}{\cos ۵\alpha-\cos ۳\alpha}=\cot ۴\alpha$$

حل :

$$\frac{\sin ۳\alpha-\sin ۵\alpha}{\cos ۵\alpha-\cos ۳\alpha}=\frac{۲\cos ۴\alpha \sin(-\alpha)}{-۲\sin ۴\alpha \sin\alpha}=\frac{\cos ۴\alpha}{\sin ۴\alpha}=\cot ۴\alpha$$

۵۴) تابع وارون $f(x)=\sin x+\cos x$ با دامنه $D_f=\left[\frac{\pi}{۴},\frac{۵\pi}{۴}\right]$ را بدست آورید .

حل :

$$y=\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\cos(x-\frac{\pi}{۴})\rightarrow \frac{y}{\sqrt{۲}}=\cos(x-\frac{\pi}{۴})\xrightarrow{۰\le x-\frac{\pi}{۴}\le \pi}$$

$$\cos^{-۱}(\frac{y}{\sqrt{۲}})=x-\frac{\pi}{۴}\rightarrow x=\cos^{-۱}(\frac{y}{\sqrt{۲}})+\frac{\pi}{۴}\rightarrow f^{-۱}(x)=\cos^{-۱}(\frac{x}{\sqrt{۲}})+\frac{\pi}{۴}$$

۵۵) کلیه جواب های معادله زیر را بیابید .

$$\cos ۳x\sin(x-\pi)-\sin ۳x\cos(\pi+x)=\cos\frac{۳\pi}{۲}$$

حل :

$$\cos ۳x\sin x+\sin ۳x\cos x=۰\rightarrow \sin(۳x+x)=۰\rightarrow \sin ۴x=۰\rightarrow ۴x=k\pi\rightarrow x=\frac{k\pi}{۴}$$

۵۶) ثابت کنید $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$.

حل :

$$\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sin x\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos x)$$

$$= \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x+\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x) = \sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)$$

$$= \sin x+\cos x$$

۵۷) مقدار عبارت زیر را به دست آورید.

$$\cos(\tan^{-1}\frac{3}{4}) = ?$$

حل :

$$\tan^{-1}\frac{3}{4} = x \to \tan x = \frac{3}{4} \to \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{9}{16}}} = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

۵۸) درستی تساویهای زیر را ثابت کنید.

الف) $$\frac{\sin 140^\circ\cos 50^\circ+\cos 140^\circ\sin 50^\circ}{\cos 80^\circ} = -1$$

ب) $$\frac{\sqrt{3}\sin(x+\frac{\pi}{6})-\cos(x+\frac{\pi}{6})}{4\cos x\sin(x+\frac{\pi}{6})-4\sin x\cos(x+\frac{\pi}{6})} = \sin x$$

حل الف)

$$\frac{\sin 140^\circ\cos 50^\circ+\cos 140^\circ\sin 50^\circ}{\cos 80^\circ} = \frac{\sin(140+50)}{\cos 80^\circ} = \frac{\sin 190^\circ}{\cos(90-10)} = \frac{\sin(180+10)}{\sin 10^\circ}$$

$$= \frac{-\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ} = -1$$

حل ب)

$$\frac{\sqrt{۳}\sin(x+\frac{\pi}{۶})-\cos(x+\frac{\pi}{۶})}{۴\cos x\sin(x+\frac{\pi}{۶})-۴\sin x\cos(x+\frac{\pi}{۶})}=\frac{۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۶})-\frac{۱}{۲}\cos(x+\frac{\pi}{۶}))}{۴(\sin(x+\frac{\pi}{۶})\cos x-\cos(x+\frac{\pi}{۶})\sin x)}$$

$$=\frac{\cos\frac{\pi}{۶}\sin(x+\frac{\pi}{۶})-\sin\frac{\pi}{۶}\cos(x+\frac{\pi}{۶})}{۲\sin(x+\frac{\pi}{۶}-x)}=\frac{\sin(x+\frac{\pi}{۶}-\frac{\pi}{۶})}{۲\sin\frac{\pi}{۶}}=\frac{\sin x}{۲\times\frac{۱}{۲}}=\sin x$$

۵۹) معادله مقابل را حل کنید.

$$Sinx\,Cos\,x=\frac{۱}{۲}\left[Cos^{۲}x-Sin^{۲}x\right]$$

حل :

$$\frac{۱}{۲}Sin۲x=\frac{۱}{۲}Cos۲x\Rightarrow Sin۲x=Sin\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)$$

$$\begin{cases}۲x=۲k\pi+\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)\Rightarrow x=\frac{K\pi}{۲}+\frac{\pi}{۲}\\ ۲x=۲K\pi+\pi-\left(\frac{\pi}{۲}-۲x\right)\Rightarrow ۲x=۲K\pi+\pi-\frac{\pi}{۲}+۲x\end{cases}$$

$۰=۲K\pi+\frac{\pi}{۲}$ غیر قابل قبول

۶۰) حاصل عبارت $\sqrt{۱+\sin۲x}-\sin x$ وقتی $\frac{۳\pi}{۴}>x>\frac{\pi}{۲}$ باشد را بدست آورید.

حل :

$$\sqrt{۱+\sin۲x}-\sin x=\sqrt{(\sin x-\cos x)^{۲}}-\sin x=|\sin x+\cos x|-\sin x$$

از طرفی داریم

$$\frac{\pi}{۲}<x<\frac{۳\pi}{۴}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}}{۲}<\sin x<۱\\ \frac{-\sqrt{۲}}{۲}<\cos x<۰\end{cases}\Rightarrow ۰<\sin x+\cos x<۱$$

$$\Rightarrow\left|\sin x+\cos x\right|=\sin x+\cos x$$

عبارت مورد نظر = $\left(\sin x+\cos x\right)-\sin x=\cos x$

۶۱) اگر $\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ و $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۳}$ بوده و β,α زاویه هایی در بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ باشند .

اندازه θ را بدست آورید.

حل :

$$\cos^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\frac{\sqrt{۳}}{۴}=\cos\frac{\pi}{۳}\cos(\alpha-\beta)=\frac{۱}{۲}\cos(\alpha-\beta)\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\rightarrow\alpha-\beta=\frac{\pi}{۶},-\frac{\pi}{۶}$$

$$\alpha-\beta=\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{\pi}{۳}}\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{۴}\\ \beta=\frac{\pi}{۱۲}\end{cases}\quad,\quad\alpha-\beta=-\frac{\pi}{۶}\xrightarrow{\alpha+\beta=\frac{\pi}{۳}}\begin{cases}\alpha=\frac{\pi}{۱۲}\\ \beta=\frac{\pi}{۴}\end{cases}$$

۶۲) دامنه و برد تابع $f(x)=۲\arcsin\frac{x}{۲}+\frac{\pi}{۲}$ را بیابید ؟

حل :

$$-۱\le\frac{x}{۲}\le۱\Rightarrow-۲\le x\le۲\rightarrow\ D_f=\left[-۲,۲\right]$$

$$\frac{-\pi}{۲} \leq \arcsin\frac{x}{۲} \leq \frac{\pi}{۲} \Rightarrow -\pi + \frac{\pi}{۲} \leq \arcsin\frac{x}{۲} + \frac{\pi}{۲} \leq \pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow \frac{-\pi}{۲} \leq y \leq \frac{۳\pi}{۲}$$

$$R_f = \left[\frac{-\pi}{۲}, \frac{۳\pi}{۲}\right]$$

۶۳) حاصل $\cos(\arctan x)$ را بیابید ؟

حل :

$$\arctan x = \alpha \Rightarrow \tan\alpha = x \qquad , \frac{-\pi}{۲} \langle \alpha \langle \frac{\pi}{۲}$$

$$\cos^{۲}\alpha = \frac{۱}{۱+\tan^{۲}\alpha} \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{۱}{۱+x^{۲}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

۶۴) ثابت کنید

$$\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = \cos ۲x$$

حل :

$$\cos^{۴} x - \sin^{۴} x = (\cos^{۲} x + \sin^{۲} x)(\cos^{۲} x - \sin^{۲} x) = ۱ \times \cos ۲x = \cos ۲x$$

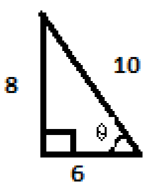
۶۵) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید .

$$۲\cos ۲x + \cos x - ۳ = ۰$$

حل :

$$۲(۲\cos^{۲} x - ۱) + \cos x - ۳ = ۰ \rightarrow ۴\cos^{۲} x + \cos x - ۵ = ۰$$

$$\xrightarrow{۴+۱-۵=۰} \begin{cases} \cos x = ۱ \rightarrow x = ۲k\pi \\ \cos x = \frac{-۵}{۴} < -۱ \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$



۶۶) با توجه به شکل زیر حاصل $\cos\left(۲\sin^{-۱}\frac{۶}{۱۰}\right)$ را بدست آورید ؟

حل :

$$\sin\theta = \frac{۸}{۱۰} \Rightarrow \sin^{-۱}\frac{۶}{۱۰} = \theta$$

$$\cos\left(۲\sin^{-۱}\frac{۶}{۱۰}\right) = \cos(۲\theta) = \cos^{۲}\theta - \sin^{۲}\theta$$

$$= \left(\frac{۶}{۱۰}\right)^{۲} - \left(\frac{۸}{۱۰}\right)^{۲} = \frac{۳۶}{۱۰۰} - \frac{۶۴}{۱۰۰} = \frac{-۲۸}{۱۰۰} = -۰/۲۸$$

۶۷) برای هر x نشان دهید :

$$Sin(\tan^{-۱} x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$$

حل : فرض می کنیم $\tan^{-۱} x = \alpha$ پس $\tan\alpha = x$, $(-\frac{\pi}{۲} < \alpha < \frac{\pi}{۲})$.

همچنین داریم : $Sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}$ پس $Sin\alpha = \frac{x}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$.

(توجه کنید که چون α در ربع اول یا چهارم است پس تانژانت و سینوس هم علامت هستند)

۶۸) مقدار $Cos^{-۱}(Sin\frac{-\pi}{۹})$ را محاسبه کنید .

حل :

$$Cos^{-۱}(Sin(-\frac{\pi}{۹})) = Cos^{-۱}(Cos(\frac{\pi}{۲}+\frac{\pi}{۹})) = Cos^{-۱}(Cos\frac{۱۱\pi}{۱۸}) = \frac{۱۱\pi}{۸}$$

تذکر : $۰ \le \frac{۱۱\pi}{۸} \le \pi$ و $Cos^{-۱}(Cosx) = x$

۶۹) مقدار روبرو را حساب کنید :

$$\cos^{-۱}(Sin\frac{۷\pi}{۱۰}) =$$

حل :

$$Cos^{-۱}(Sin(\frac{۷\pi}{۱۰})) = Cos^{-۱}(Cos(\frac{\pi}{۲}-\frac{۷\pi}{۱۰})) =$$

$$Cos^{-۱}(Cos\ \frac{-۲\pi}{۱۰}) = Cos^{-۱}(Cos\ \frac{\pi}{۵}) = \frac{\pi}{۵}$$

۷۰) مقدار عددی عبارت A را تعیین کنید.

$$A=tg\left(tg^{-۱}(-۱)+\sin^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)+\cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)\right)$$

$$tg^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۴}\quad,\quad \sin^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶}\quad,\quad \cos^{-۱}\left(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)=\frac{۳\pi}{۴}$$

$$A=tg\left(-\frac{\pi}{۴}-\frac{\pi}{۶}+\frac{۳\pi}{۴}\right)=tg\left(\frac{\pi}{۳}\right)=\sqrt{۳}$$

۷۱) معادله $\sin x\cos x=\cos^{۲}x-\frac{۱}{۲}$ در $[۰,۲\pi]$ چند ریشه دارد آنها را بیابید.

حل:

$$\frac{۱}{۲}\sin ۲x=\frac{۱+\cos ۲x}{۲}-\frac{۱}{۲}\Rightarrow \sin ۲x=\cos ۲x\Rightarrow tg۲x=۱=tg\frac{\pi}{۴}$$

$$\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴}\Rightarrow x=\frac{\pi}{۸},\frac{۵\pi}{۸},\frac{۹\pi}{۸},\frac{۱۳\pi}{۸}$$

۷۲) **درستی اتحاد** $Sin۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲}x}$ **را ثابت کنید.**

$$\frac{2\tan x}{1+\tan^2 x}=\frac{\frac{2Sinx}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}=\frac{2SinxCos^2x}{Cosx}=2\sin xCosx=Sin2x$$

۷۳) معادله مثلثاتی $۲\cos^{۲}x-\sin ۲x=۱$ را در حالت کلی حل کنید و سپس جواب های آن را در بازهٔ $[۰/۲\pi]$ به دست آورید.

حل:

$$۲\cos^{۲}x-۱=\sin ۲x$$

$$\cos ۲x=\sin ۲x$$

$$\tan ۲x=۱=\tan\frac{\pi}{۴}\Rightarrow ۲x=k\pi+\frac{\pi}{۴},k\in z\quad\Rightarrow x=\frac{k\pi}{۲}+\frac{\pi}{۸}$$

$$x=\frac{\pi}{۸},\ \frac{۵\pi}{۸},\ \frac{۱۳\pi}{۸}$$

۷۴) عبارت $\frac{\sin ۲۰^{\circ}+\sin ۸۰^{\circ}+\sin ۱۴۰^{\circ}}{\cos ۲۰^{\circ}+\cos ۸۰^{\circ}+\cos ۱۴۰^{\circ}}$ را به ساده ترین صورت ممکن تبدیل کنید.

حل :

$$\frac{\sin ۲۰^\circ+\sin ۸۰^\circ+\sin ۱۴۰^\circ}{\cos ۲۰^\circ+\cos ۸۰^\circ+\cos ۱۴۰^\circ}=\frac{(\sin ۱۴۰^\circ+\sin ۲۰^\circ)+\sin ۸۰^\circ}{(\cos ۱۴۰^\circ+\cos ۲۰^\circ)+\cos ۸۰^\circ}=$$

$$\frac{۲\sin\frac{۱۴۰^\circ+۲۰^\circ}{۲}\cos\frac{۱۴۰^\circ-۲۰^\circ}{۲}+\sin ۸۰^\circ}{۲\cos\frac{۱۴۰^\circ+۲۰^\circ}{۲}\cos\frac{۱۴۰^\circ-۲۰^\circ}{۲}+\cos ۸۰^\circ}=$$

$$\frac{۲\sin ۸۰^\circ\cos ۶۰^\circ+\sin ۸۰^\circ}{۲\cos ۸۰^\circ\cos ۶۰^\circ+\cos ۸۰^\circ}=\frac{\sin ۸۰^\circ+\sin ۸۰^\circ}{\cos ۸۰^\circ+\cos ۸۰^\circ}$$

$$=\tan ۸۰^\circ$$

۷۵) اگر $۴\cos x-۳\sin x+۴=۰$ باشد ، $\tan x$ را بیابید .

حل :

$$\cos x=\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}\quad,\quad \sin x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}$$

$$۴\frac{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}-۳\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱+\tan^۲\frac{x}{۲}}+۴=۰\rightarrow ۴-۴\tan^۲\frac{x}{۲}-۶\tan\frac{x}{۲}+۴+۴\tan^۲\frac{x}{۲}=۰\rightarrow$$

$$\tan\frac{x}{۲}=\frac{۴}{۳}\rightarrow \tan x=\frac{۲\tan\frac{x}{۲}}{۱-\tan^۲\frac{x}{۲}}=\frac{۲(\frac{۴}{۳})}{۱-(\frac{۴}{۳})^۲}=\frac{\frac{۸}{۳}}{\frac{-۷}{۹}}=\frac{-۲۴}{۷}$$

۷۶) معادله مثلثاتی زیر را حل کنید .

$$\sin^۲ x-(۱+\sqrt{۳})\sin x\cos x+\sqrt{۳}\cos^۲ x=۰$$

حل : معادله را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می کنیم .

$$\tan^{۲} x-(۱+\sqrt{۳})\tan x+\sqrt{۳}=۰ \to (\tan x-۱)(\tan x-\sqrt{۳})=۰$$

$$\to \begin{cases} \tan x=۱ \to x=k\pi+\frac{\pi}{۴} \\ \tan x=\sqrt{۳} \to x=k\pi+\frac{\pi}{۳} \end{cases}$$

۷۷) عبارت مثلثاتی $A=۲\sin ۲x-\sin ۴x$ را به حاصل ضرب تبدیل کنید.

حل :

$$A=2\sin 2x-\sin 4x=2\sin 2x-2\sin 2x\cos 2x=2\sin 2x(1-\cos 2x)=$$
$$2\times 2\sin x\cos x(2\sin^2 x)=8\sin^3 x\cos x$$

۷۸) کمترین مقدار $\sin^{-۱}\left(x^{۲}+x-\frac{۱}{۴}\right)$ چقدراست ؟

حل :

$$y=\sin^{-۱}\left(x^{۲}+x-\frac{۱}{۴}\right)=\sin^{-۱}\left[\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\right]$$

چون تابع $\sin^{-۱}$ تابعی صعودی اکید است بـا محاسـبه ی کمتـرین مقـدارعبارت جلـوی آن مـی تـوان کمتـرین مقدارکل تابع را مشخص نمود.

$$\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}\geq ۰ \to \left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\geq -\frac{۱}{۲} \quad \Rightarrow \sin^{-۱}\left[\left(x+\frac{۱}{۲}\right)^{۲}-\frac{۱}{۲}\right]\geq \sin^{-۱}\left(-\frac{۱}{۲}\right)=-\frac{\pi}{۶}$$
$$\Rightarrow \min y=-\frac{\pi}{۶}$$

۷۹) ثابت کنید: $\sin ۲x=\dfrac{۲\tan x}{۱+\tan^{۲} x}$

$$\frac{۲\times\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{۱}{\cos^{۲} x}}=۲\frac{\sin x\cos^{۲} x}{\cos x}=۲\sin x\cos x=\sin ۲x$$

۸۰) حدود k برای آن که معادله‌ی $۳\sin^{۲} x+۴\cos^{۲} x+k\sin x\cos=۲$ دارای ریشه باشد کدام است؟

حل: طرفین را بر $\cos^{۲} x$ $(\cos^{۲} x\neq ۰)$ تقسیم می‌کنیم.

$$3\tan^2 x + 4 + k\tan x = \frac{2}{\cos^2 x} \xrightarrow{\frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x} 2(1+\tan^2 x) = 2 + 2\tan^2 x \Rightarrow$$

$$3\tan^2 x + 4 + k\tan x = 2 + 2\tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x + k\tan x + 2 = 0 \xRightarrow[\Delta \geq 0]{\text{شرط وجود جواب}} k^2 - 4(1)(2) \geq 0$$

$$\Rightarrow k^2 - 8 \geq 0 \Rightarrow k^2 \geq 8 \Rightarrow |k| \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} k \geq 2\sqrt{2} \\ k \geq -2\sqrt{2} \end{cases}$$